12 Parametrisierte Kurven

In diesem Abschnitt wollen wir intensiver um die Geometrie von parametrisierten Kurven (Wegen) im $\mathbb{R}^n$ befassen. Zur Erinnerung wiederholen wir die Definitionen.

Definition 12.1 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Abbildung $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ heißt parametrisierte Kurve (Weg) im $\mathbb{R}^n$. Das Bild $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt die Spur von α.*

Beispiel 12.2 *1.* $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$; $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

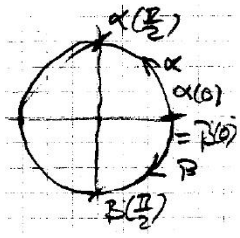

Abbildung 18: Kreisring

2. $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$; $\beta(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$

Wir sehen: Zwei unterschiedliche Wege können dieselbe Spur besitzten. Die spezielle Parametrisierung beinhaltet mehr Informationen, als nur das Bild (etwa Durchlaufrichtung und Geschwindigkeit).

3. $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. *Hier wird der Kreis zweimal durchlaufen.*

4. $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4; \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ at \end{pmatrix}$, $a > 0$ *fest.*

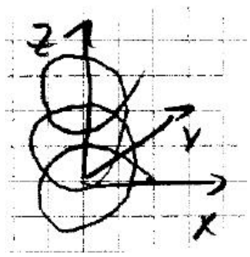

Abbildung 19: Schraubenlinie mit Steigung $a2\pi$ (nach einer Drehung ist die Z-Komponente um $a2\pi$ gewachsen).

5. *$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$; $\alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$, $a, b > 0$ fest. Für $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$ gilt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.*

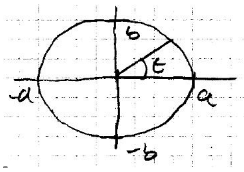

Abbildung 20: Ellipse mit Hauptachsen $a, b > 0$

6. *Zykloide: Die Kreisscheiberolle auf der x-Achse. Ein Punkt auf dem Rand des Kreises beschreibt dabei eine Zykloide. Damit erhalten wir die Parametrisierung $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$;*

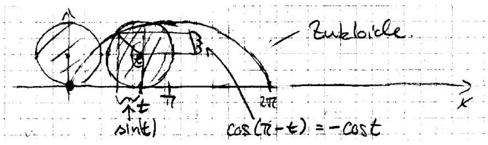

Abbildung 21: Zykloide

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

Alle oben betrachteten Beispiele sind differenzierbar.

Definition 12.3 *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann heißt $\alpha'(t_0)$ Tangentialvektor von α an der Stelle $\alpha(t_0)$ und $\|\alpha'(t_0)\|_2$ heißt Geschwindigkeit von α an der Stelle t_0 (oder „zur Zeit t_0“).*

Motivation: $\alpha'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(\alpha(t) - \alpha(t_0))$
Dies ist der Richtungsvektor von $\alpha(t_0)$ in Richtung $\alpha(t)$ mit Länge $= \frac{\text{Abstand}}{\text{Zeit}}$ = Geschwindigkeit.

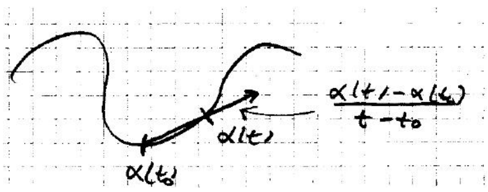

Abbildung 22: $t \to t_0 \rightsquigarrow \alpha'(t_0)$ = Richtungsvektor der Tangente, $\|\alpha'(t_0)\|_2$ = Geschwindigkeit im Punkt t_0.

Eine stetig differenzierbare Funktion $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ heißt glatt. Gilt zusätzlich $\alpha'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$, so heißt α regulär.

Beispiel 12.4 *Sei* $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$*;* $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$*. dann ist* α *glatt, aber die Spur von* α *besitzt eine „Spitze“.*

$$\left.\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= t^3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x > 0 \text{ und } y = \pm x^{\frac{3}{2}}$$

An der Stelle $t = 0$ *ist* α *nicht regulär. Reguläre Kurven besitzten keine „Spitzen“ (Ist*

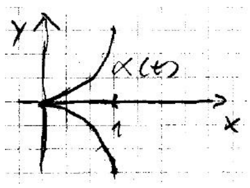

Abbildung 23: Beispiel für eine Kurve mit „Spitze“

$\alpha'(t_0) = 0$*, so kommt die „Bewegung“ dort zum „Stillstand“. Man kann dann in eine andere Richtung weiterlaufen, ohne die Differenzierbarkeit zu verletzen. Dies geht nicht im „vollen Lauf“).*

Definition 12.5 (Umparametrisierung) *Sei* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *eine parametrisierte Kurve und sei* $\varphi : J \to I$ *stetig differenzierbar und bijektiv mit* $\varphi(t) \neq 0 \ \forall t \in J$*. Dann heißt* $\beta : J \to \mathbb{R}^n$*,* $\because (t) = \alpha(\varphi(t))$ *eine* <u>*Umparametrisierung*</u> *von* α*.* φ *heißt die* <u>*Parameterwechselfunktion*</u>*.*

<u>**Beachte:**</u> Da φ bijektiv gilt $\beta(J) = \alpha(I)$, dh. α und β haben dieselbe Spur. Ferner gilt: Ist $\varphi'(t) > 0$, so ist φ streng monoton wachsend und α und β haben dieselbe Laufrichtung. Ist $\varphi < 0 \ \forall t$, so ist φ streng monoton fallend und die Laufrichtung ändert sich.
Schließlich gilt:

Lemma 12.6 *Für parametrisierte Kurven* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$*,* $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ *sagen wir*

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta \text{ ist Umparametrisierung von } \alpha.$$

Dann ist „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation.

<u>***Beweis:***</u> *Ist* $\varphi : J \to I$ *Parameterwechselfunktion mit* $\beta = \alpha \circ \varphi$*, so ist* $\varphi^{-1} : I \to J$ *Parameterwechselfunktion mit* $\alpha = \beta \circ \varphi^{-1}$*. Ist* $\gamma : K \to \mathbb{R}^n$ *weitere Funktion und* $\psi : K \to J$ *Parameterwechselfunktion mit* $\gamma = \beta \circ \psi$*, so folgt* $\gamma = \alpha \circ (\varphi \circ \psi)$*, also* $\alpha \sim \beta$ *und* $\beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$*.* ■

Mit etwas Mühe kann man den folgenden Satz beweisen:

Satz 12.7 *Seien* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$*,* $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ *regulär und injektiv mit* $\alpha(I) = \beta(J)$*. Dann gilt* $\alpha \sim \beta$*.*

Wir sehen also, dass unter geeigneten Bedingungen eine parametrisierte Kurve bis auf Äquivalenz nur von der Spurz abhägt.

Wir kommen nun zum wichtigen Begriff der Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$.

Definition 12.8 *Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig differenzierbar, dh. $\exists$ Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = b$ mit α stetig differenzierbar auf $[t_{i-1}, t_i]$ $\forall 1 \leq i \leq l$. Dann setzten wir*

$$L(\alpha) := intabab\|\alpha'(t)\|_2 dt \left(= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\|_2 dt \right)$$

und $L(\alpha)$ heißt die Länge von α.

Bemerkung: Die Definition ist sicher „physikalisch“ plausibel, denn der zurückgelegte Weg ist gleich dem Integral der Geschwindigkeit.
Aber wir wollen die Formel natürlich auch „mathematisch“ plausibel machen.

Sei dazu $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zerlegen wir $[a,b]$ in k gleich lange Teilintervalle, und verbinden wir für aufeinanderfolgende Teilungspunkte t_{i-1}, t_i die Punkte $\alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i)$ durch eine Strecke, so erhalten wir einen Polygonzug, den die Kurve α appoximiert.

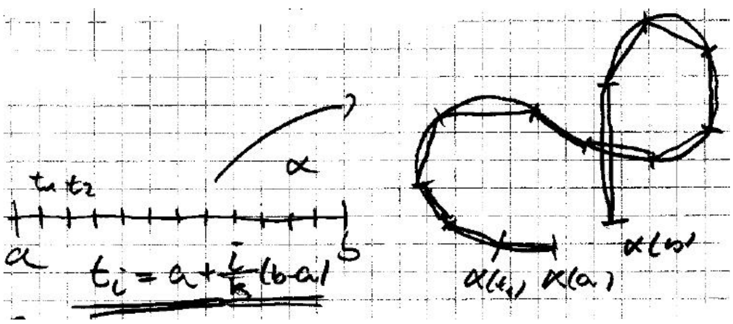

Abbildung 24: Für die Länge L_n des Polygonzugs gilt: $L_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|_2$

Für $k \to \infty$ sollte die Länge des Polygonzuges gegen die Länge der durchlaufenen Kurve $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ konvergieren. Wir zeigen, dass dies tatsächlich so ist:

Satz 12.9 *Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$L(\alpha) = \int\limits_a^b \|\alpha'(t)\|_2 dt = \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_{i,k}) - \alpha(t_{i-1,k})\|_2 \right)$$

mit $t_{i,k} = a + \frac{i}{k}(b-a)$.

Beweis: *Da $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist, ist $t \mapsto \|\alpha'(t)\|_2$ stetig. Dabei gilt (Riemannsche Summe)*

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|_2 dt = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{k} \sum_{i=1}^{k} \|\alpha'(t_{i,k})\|_2$$

Wir vergleichen nun die beiden Summen:
Sei nun n fest und schreibe $t_i := t_{i,k} = a + \frac{i}{k}(b-a)$ für alle $0 \le i \le k$. Da α stetig differenziebar, sind alle Komponentenfunktionen $\alpha_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann $\tau_{i,j} \in [t_{i-1}, t_i]$ mit

$$\alpha_j(t_i) - \alpha_j(t_{i-1}) = t_i - t_{i-1}\alpha_j'(\tau_{i,j}) = \frac{b-a}{k}\alpha_j'(\tau_{i,j})$$

Setzen wir dann $x(i) :) \begin{pmatrix} \alpha_1'(\tau_{i,1}) \\ \vdots \\ \alpha_n'(\tau_{i,n}) \end{pmatrix}$, so gilt

$$\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|_2 = \frac{b-a}{k}\|x(i)\|_2 \quad \forall 1 \le i \le k, \text{ und damit}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|_2 = \frac{b-a}{k} \sum_{i=1}^{k} \|x(i)\|_2. \qquad (*)$$

Da alle $\alpha_j' : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und dann auch gleichmäßig stetig sind, existiert zu jedem $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|\alpha_j'(t) - \alpha_j'(s)| < \delta, \text{ falls } |t-d| \le \frac{b-a}{N} \quad \forall 1 \le j \le n \qquad (**)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegen. Da $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, existiert $c > 0$ mit $\|y\|_2 \le c\|y\|_\infty$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$. Wähle dann $\delta = \frac{\varepsilon}{c(b-a)}$ und N wie oben. Dann folgt für alle $k \ge N$: $|t_i - \tau_{i,j}| \le \frac{b-a}{k} \le \frac{b-a}{N}$, und dann folgt mit $(**)$ für alle $1 \le i \le n$:

$$\|\alpha'(t_i) - x(i)\|_2 \le c\|\alpha'(t_i) - x(i)\|_\infty \overset{(**)}{\le} c\delta = \frac{\varepsilon}{b-a},$$

und dann gilt:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{k}\|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\|_2-\frac{b-a}{k}\sum_{i=1}^{k}\|\alpha'(t_i)\|_2\right| &\overset{(*)}{=} \frac{b-a}{k}\left|\sum_{i=1}^{k}\|x(i)\|_2-\|\alpha'(t_i)\|_2\right| \\ &\leq \frac{b-a}{k}\sum_{i=1}^{k}\left|\|x(i)\|_2-\|\alpha'(t_i)\|_2\right| \\ &\underset{\triangle-Ungl.}{\overset{Umgekehrte}{\leq}} \frac{b-a}{k}\sum_{i=1}^{k}\underbrace{\|x(i)-\alpha'(t_i)\|_2}_{\leq\frac{\varepsilon}{b-a}} \\ &\leq \frac{b-a}{k}\cdot k\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon.\quad \forall k\geq N\end{aligned}$$

Damit folgt

$$L(\alpha)=\lim_{k\to\infty}\frac{b-a}{k}\sum_{i=1}^{k}\|\alpha'(t_{i,k})\|_2=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\|\alpha(t_{i,k}-\alpha(t_{i-1,k})\|_2 \qquad \blacksquare$$

Beispiel 12.10 *1. Sei $\alpha:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$; $\alpha'(t)=\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$. Dann gilt*

$$L(\alpha)=\int_0^{2\pi}\left\|\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}\right\|_2 dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}dt=\int_0^{2\pi}1dt=2\pi$$

Die Länge der Kreislinie ist also 2π (wissen wir schon!).

2. Länge der Zykloide: $\alpha:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$; $\alpha(t)=\begin{pmatrix}t-\sin(t)\\ 1-\cos(t)\end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$L(\alpha)=\int_0^{2\pi}=\left\|\begin{pmatrix}1-\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}\right\|=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos(t))^2+\sin^2(t)}dt$$

Nun gilt $(1-\cos(t(^2+\sin^2(t)=1-2\cos(t)+\cos^2(t)+\sin^2(t)=2-2\cos(t)=4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$, *denn* $\cos(t)=\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ *und dann*

$$1-\cos(t)=\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)-\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)=2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

Es folgt

$$L(\alpha)=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt=\int_0^{2\pi}2\sin\left(\frac{2}{\pi}\right)dt=-4\cos(\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4\cos(\pi)+4\cos(0)=8.$$

Wir wollen nun eine gegebene reguläre Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ nach seiner Bogenlänge umparametrisieren.

Satz 12.11 *Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre parametrisierte Kurve und sei $\alpha \in I$ fest. Für $t \in I$ sei $l : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $l(t) = \int\limits_a^t \|\alpha'(s)\|_2 ds$.*
Ist dann $J := l(I) \subseteq \mathbb{R}$, so ist $l : I \to J$ streng monoton wachsend und bijektiv und $l^{-1} : J \to I$ ist Parameterwechselfunktion für α. Ist dann $\beta : J \to \mathbb{R}^n$; $\beta(s) = \alpha(l^{-1}(s))$, so gelten:

(1) $\|\beta'(s)\|_2 = 1 \ \forall s \in J$.

(2) Für alle $s_1, s_2 \in J$ mit $s_1 \leq s_2$ gilt $s_2 - s_1 =$ Länge $(\beta|_{s_1,s_2})$.

Wir sagen dann: Die Kurve $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ ist nach Bogenlänge parametrisiert. Der Satz besagt also, dass sich jede reguläre Kurve nach Bogenlänge umparametrisieren lässt.

Beweis: *Sei $l : I \to J$ wie im Satz. Da $t \to \|\alpha'(t)\|_2$ stetig ist, gilt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass l stetig differenzierbar mit $l'(t) = \|\alpha'(t)\|_2 \ \forall t \in I$. Da α regulär, ist $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$ und damit $l'(t) > 0 \ \forall \in I$. Damit ist $l : I \to J$ streng monoton wachsend, und damit auch bijektiv. Für $l^{-1} : J \to I$ gilt dann:*

$$(l^{-1})'(l(t)) = \frac{1}{l'(t)} \cdot \frac{1}{\|\alpha'(t)\|_2} \quad \forall t \in I.$$

Insbesondere ist $(l^{-1})'(s) \neq 0 \ \forall s \in J$ und $l^{-1} : J \Rightarrow I$ ist Parameterwechselfuntion.
Sei nun $\beta : J \to \mathbb{R}^n$, $\beta(s) = \alpha(l^{-1}(s))$.
Dnn gilt für alle $s(t) \in J$:
$\beta'(s) = \alpha'(l^{-1}(s))(l^{-1})'(s) \overset{s.o.}{=} \alpha'(t) \cdot \frac{1}{\|\alpha'(t)\|_2}$, also $\|\beta'(s)\|_2 = 1$- Sind dann $s_1 \leq s_2 \in J$, so folgt
$L(\beta|_{[s_1,s_2]} = \int\limits_{s_1}^{s_2} \|\beta'(s)\|_2 ds = \int\limits_{s_1}^{s_2} 1 ds = s_2 - s_1$. ∎

Bemerkung 12.12 *Natürlihc ist die Länge $L(\alpha)$ eines stetig differenzierbaren Weges $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ invarianter unter Parameterwechsel, dann ist $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ Parameterwechselfunktion und $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$, $\beta = \alpha \circ \varphi$, so gilt*

$$L(\beta) = \int\limits_c^d \|\beta'(s)\|_2 ds = \int\limits_c^d \|\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\|_2 ds = \int\limits_c^d \|\alpha'(\varphi(s))\|_2 \varphi'(s) ds = \int\limits_a^b \|a'(t)\|_2 dt.$$

Beispiel 12.13 (Schraubenlinie) *<u>Betrachte:</u> $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$; $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ sin(t) \\ at \end{pmatrix}$, $a > 0$.*

Sei $t_0 = 0$. Wegen $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ a \end{pmatrix}$ gilt $\|\alpha'(t)\|_2 = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + a^2} = \sqrt{1 + a^2}$, *also gilt*

$$l(t) = \int\limits_0^t \|\alpha'(t)\|_2 dt = \int\limits_0^t \sqrt{1+a^2} dt = t\sqrt{1+a^2}$$

und damit ist $l^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gegeben duch* $l^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{1+a^2}}$. *Dann ist* $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right)$ *die nach Bogenlänge umparametrisierte Schraubenlinie.*

Beachte: Im allgemeneinen ist es sehr schwer, und oft sogar unmöglich, die parametrisierte nach Bogenlänge in eine geschlossene Form anzugeben.

Wir wollen uns im Rest des Abschnitts auf Kurven in der Ebene einschränken. Ein besonders schönes Resultat ist hier die Leipniz-Formel zur Berechnung der orientierten Sektorfläche eine parametrisierte Kurve $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

Definition 12.14 (Sektorfläche) *Sei* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *stetiger Weg. Dann heißt die Strecke*

$$[0, \alpha(t)] = \{\lambda\alpha(t) \mid \lambda \in [0,1]\}$$

der Fahrstrahl von α *an der Stelle* t. *Die Sektorfläche* F_α *von* α *ist die vom „Fehrstrahl überstrichene orientierte Fläche“, wobei ein Flächenstück positiv (bzw. negativ) gewertet wird, wenn das Flächenstück in positive (bzw. negative) Richtung vom Fahrstrahl überstrichen wird. Hierbei gilt (bzgl. der Standardbasiss* $\{e_1, e_2\}$*)*

positive Richtung = entgegen Uhrzeigersinn
negative Richtung = im Uhrzeigersinn

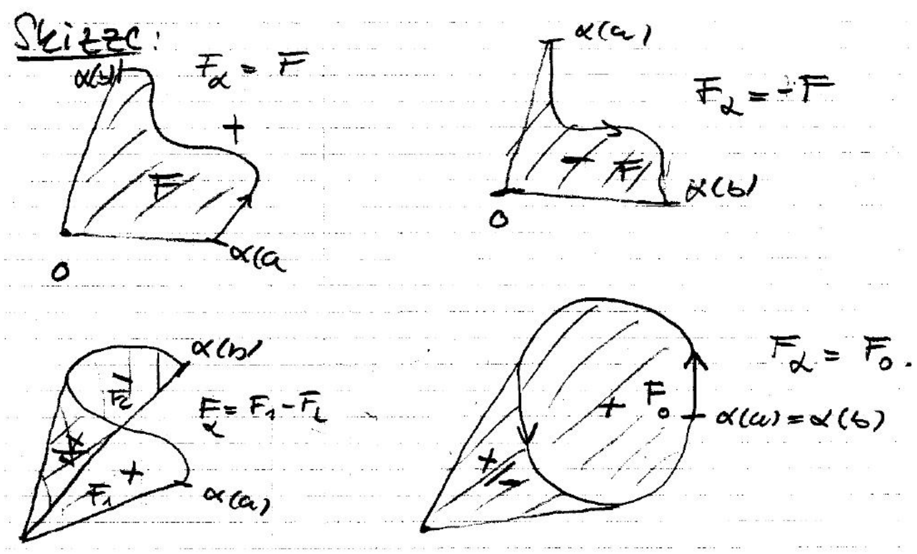

Abbildung 25: Sektorfläche

Wir sehen: Ist G ein von den geschlossenen Kurven $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (dh. $\alpha(a) = \alpha(b)$) umrandetes Gebiet im $\mathbb{R}^2$, so dass α genau einmal in posivtiver Richtung dem Rand von G durchläuft, so ist $F_\alpha = F(a)$ die positive Fläche von G!

12.15 (Sektorformel von Leibniz) *Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbarer Weg mit $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [a,b]$. Dann gilt*

$$F_\alpha = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt.$$

Herleitung: *Zerlege F_α in n gleichlange Teilintervalle $[t_{i-1}, t_i]$, $t_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, $1 \leq i \leq n$. Wir approximieren F_α durch die Summe $F_n = \sum_{i=1}^{n} F(D_i)$ mit $F(D_i)$ in die orientierte Fläche des orientierten Dreiecks*

$$D_i = \triangle \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i) \right)$$

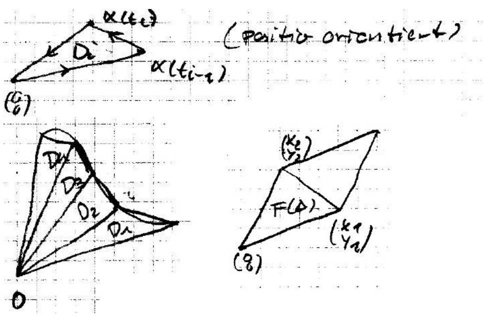

Abbildung 26: Fläche orientierter Dreiecke

Wir erhalten dann $\boxed{F_\alpha = \lim_{n\to\infty} F_n}$ (wir nehmen dies als mathematische Definition von F_α). Sind $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, so hat das orientierte Dreieck $\triangle \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$ die orientierte Fläche

$$F(\triangle) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_2)$$

Denn nach der linearen Algebra hat das von $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm die orientierte Fläche

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{i=1}^{n} F(D_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x(t_{i-1})y(t_i) - y(t_{i-1})x(t_i)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x(t_{i-1}(y(t_i) - y(t_{i-1}) - y(t_{i-1}(x(t_i) - x(t_{i-1}))\,. \end{aligned}$$

Da $x(t)$, $y(t)$ differenziebar, existiert nach dem Mittelwertsatz $\tau_i, \tilde{\tau}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ mit

$$\begin{aligned} y(t_i) - y(t_{i-1}) &= (t_i - t_{i-1})y'(\tau_i) = \tfrac{b-a}{n} y'(\tau_i) \\ x(t_i) - x(t_{i-1}) &= \tfrac{b-a}{n} x'(\tilde{\tau}_i) \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$F_n = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1})y'(\tau_i) - y(t_{i-1})x'(\tilde{\tau}_i)$$

Auf der anderen Seite gilt mit der Riemannschen Summe

$$\frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t)dt = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1})y'(t_{i-1}) - y(t_{i-1})x'(t_{i-1})}^{:=\tilde{F}_n}$$

Sei $K \geq 0$ mit $|x(t)|$, $|y(t)| \leq K$ $\forall t \in [a,b]$ (existiert, da $t \to x(t), y(t)$ stetig). Da $x \to x'(t), y'(t)$ stetig, also auch gleichmäßig stetig, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x'(t) - x'(s)|, |y'(t) - y'(s)| < \frac{\varepsilon}{K(b-a)}$ $\forall |t-s| \leq \frac{b-a}{N}$. Dann folgt für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned} \left|F_n - \tilde{F}_n\right| &= \left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1})(y'(\tau_i) - y'(\tau_{i-1})) - y(t_{i-1})(x'(\tilde{\tau}_i) - x'(t_{i-1}))\right| \\ &\leq \frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n} |x(t_{i-1})||y'(\tau_i) - y'(t_{i-1})| + |y(t_{i-1}||x'(\tilde{\tau}_i - x'(t_{i-1})| \\ &\leq \frac{b-a}{2n}\cdot n\left(K\frac{\varepsilon}{K(b-a)} + K\frac{\varepsilon}{K(b-a)}\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt $(F_n - \tilde{F}_n) \to 0$ für $n \to \infty$, also

$F(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{F}_n = \frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'tdt$ ■

Beispiel 12.16 (Ellipsenfläche) *Sei $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$ $a, b > 0$.*

Skizze:

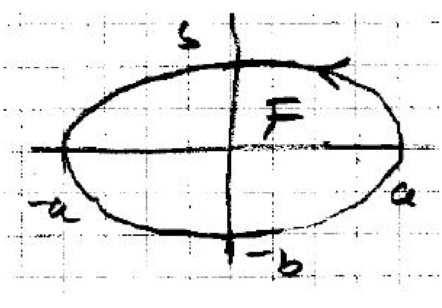

Abbildung 27: Ellipsenfläche

Dann durchläuft α einmal in positiver Richtung den Rand der Ellipsenscheibe mit Halbachsen $a, b > 0$.
Für die Fläche folgt daher

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos(t)(b\sin(t))' - b\sin(t)(a\cos(t))'dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2(t) + \sin^2(t))dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} 1dt = ab\pi \end{aligned}$$