10 Der Satz über implizite Funktionen und Umkehrfunktionen

Motivation: Sei $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Wir wollen die Frage untersuchen, in wieweit sich die Gleichung

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$$

nach x auflösen lässt, dh. ob eine differenzierbare Funktion $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit $y \in f(x)$, also

$$F\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = c \qquad \forall x \in I.$$

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine solche Funktion, so sagen wir, dass f implizit durch die Gleichung $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$ gegeben ist.

Beispiel:

a) $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$. Ist dann $c > 0$, so gilt

$$x^2 + y^2 = c \Leftrightarrow y^2 = c - x^2 \Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{c}, \sqrt{c}\right] \text{ und } y = f_{1,2}(x) = \pm\sqrt{c - x^2}.$$

Ist nun dein Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ mit $x_0^2 + y_0^2 = c$ vorgegeben und ist $y_0 \neq 0$, so erfüllt genau eine der Lösungen f_1, f_2 die Gleichung $f(x_0) = y_0$ nämlich $f_1(x_0) = \sqrt{c - x_0^2}$, falls $y_0 > 0$ und $f_2(x_0) = -\sqrt{c - x_0^2}$, falls $y_0 < 0$.
Im Fall $y_0 = 0$ geht die Eindeutigkeit verloren (und es gibt dann auch keine Auflösung in einer ganzen Umgebung von x_0, da $x_0 = \pm\sqrt{c}$ sein muss!).

Beachte: Im Fall $y_0 = 0$ gilt immer $\dfrac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = 2y|_{y=0} = 0$, für $y \neq 0$ gilt aber stets $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} 2y \neq 0$.

b) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy\sin(x^2 + y^2)$. Hier ist es nicht leich möglich, die Gleichung $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$ aufzulösen.

Problem: Wann existieren (eindeutige) Auflösungen in einer Umgebung eines Startpunkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ mit $F\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = c$?

Die Antwort hierauf gibt der Satz über implizite Funktionen, den wir in diesem Abschnitt beweisen wollen! Zur Formulierung benötigen wir:

Bezeichnung 10.1 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Wir schreiben Elemente in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ als Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, und für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$ schreiben wir $\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für die Ableitungen von F nach x, bzw. y, h.*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \qquad \textit{und}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \in M_{m \times m}(\mathbb{R}) \qquad \textit{(quadratisch!)}$$

Da $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ quadratische Matrix ist, können wir $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf Invertierbarkeit untersuchen!

Mit dieser Notation können wir nun den wichtigen Satz über implizite Funktionen formulieren:

Satz 10.2 (über implizite Funktionen) *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in U, c \in \mathbb{R}^m$ mit*

$$F\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = c \quad \textit{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \ \textit{invertierbar.}$$

Dann existiert eine offene Umgebung $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ von y_0 (etwa $U_1 = U_\delta(x_0), U_2 = U_\varepsilon(y_0)$) und eine stetig partiell differenzierbare Funktion $f : U_1 \to U_2$ mit

(1) $U_1 \times U_2 \subseteq U$ und $F\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = c \quad \forall x \in U_1$.

(2) $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ ist invertierbar für alle $x \in U_1$ und es gilt:

$$Df(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \forall x \in U_1$$

(3) Sind $x \in U_1$, $y \in U_2$ mit $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$, so gilt $y = f(x)$.

Bemerkung 10.3 *Bedingung (3) im Satz sagt, dass die Gleichung* $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = c$ *auf* $U_1 \times U_2$ *eindeutig durch f ausgelöst wird.*

Wir führen den Beweis von 10.2 in mehreren zum Teil recht aufwendigen Schritten durch: Wir starten mit

Lemma 10.4 *Seien* $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ *offen,* $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ *stetig partiell differenzierbar, und* $f : U_1 \to U_2$ *stetig mit* $F\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix} = c$ *und* $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}$ *invertierbar für alle* $x \in U_1$.
Dann ist auch $f : U_1 \to U_2$ *stetig differenzierbar mit*

$$Df(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix} \quad \forall x \in U_1 \qquad (*)$$

Beweis: *Die Arbeit besteht darin zu zeigen, dass* $f : U_1 \to U_2$ *differenzierbar ist. Ist die gezeigt, so folgt* $(*)$ *wie folgt: Betrachte* $g : U_1 \to \mathbb{R}^m; g(x) = F\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}$.
Da $g(x) = c\ \forall x \in U_1$ *gilt* $Dg = 0$*. Ist f differenzierbar, so folgt dann mit Kettenregel*

$$\begin{aligned} 0 = Dg(x) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}, \frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}E_n\\Df(x)\end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix} + \frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}Df(x) \end{aligned}$$

Dann folgt: $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}Df(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}$ *und Multipliziert mit* $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}\right)^{-1}$ *liefert Formel* $(*)$.
Da F stetig differenzierbar folgt aus $(*)$ *dann auch, dass* $x \mapsto Df(x)$ *stetig ist, also f stetig differenzierbar.*

Wir müssen also zeigen, dass f differenzierbar in jedem $x_0 \in U_1$*. Seien dazu o.B.d.A* $c = 0$ *(sonst Überlegung auf* $\tilde{F}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - c$*) und* $x_0 = 0$*,* $f(x_0) = 0$ *(sonst Überlegungen auf* $\tilde{U_1} = U_1 - x$*,* $\tilde{U_2}U_2 - f(x_0)$ *und* $\tilde{F}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} := F\begin{pmatrix}x+x_0\\y+y_0\end{pmatrix}$*,* $\tilde{f}(x) = f(x + x_0)$*).*
Nach der obigen Rechnung ist der einzige Kandidat für $Df(0)$ *die Matrix* $\boxed{-B^{-1}A}$ *mit*

$$B = \frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}; \quad A = \frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Nach Definition von Differenzierbarkeit müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\|x\|_2}(f(x) - \overbrace{\cancel{f(c)}}^{=0} + B^{-1}Ax) = 0 \qquad (*)$$

Betrachte:

$$(I)\begin{cases} R\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & = F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - F\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - DF\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - (A,B)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \\ & = F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - Ax - By \end{cases}$$

Da F differenzierbar in $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ *gilt:*

$$(II) \qquad \lim_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|_2} R\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0$$

Da $R\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix} = 0\ \forall x \in U_1$ *liefert (I):*

$$(III) \qquad R\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix} = -Ax - Bf(x) \text{ bzw. } \boxed{f(x) = -B^{-1}R\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix} - B^{-1}Ax}$$

Einsetzten in $(*)$ *zeigt: Es genügt zu zeigen, dass*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\|x\|_2}B^{-1}R\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix} = 0$$

Da $\left\|B^{-1}R\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}\right\|_2 \le \|B^{-1}\|_{op}\left\|R\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}\right\|_2$, *folgt dies aus*

$$(**) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\|x\|_2}R\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix} = 0$$

<u>*Wir zeigen nun:*</u> $\exists K \ge 0$ *und* $\delta > 0$ *mit* $U_\delta(0) \subseteq U_1$ *und* $\left\|\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}\right\|_2 \le K\|x\|_2\ \forall x \in U_\delta(0)$.

Ist dies gezeigt, so folgt $\frac{1}{\|x\|_2} \le K\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}\right\|_2}$ *und*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\|x\|_2}\left\|R\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}\right\|_2 &\le \lim_{x\to 0}\frac{K}{\left\|\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}\right\|_2}\left\|R\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}\right\|_2 \\ &\overset{f \text{ stetig in } 0}{=} \lim_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}\frac{K}{\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|_2}\left\|F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|_2 \overset{II}{=} 0. \qquad \underline{\textit{Fertig!}}\end{aligned}$$

Beweis zur Existenz von K: (II) *liefert:* $\exists \varepsilon > 0$ *mit* $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U_\varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *gilt*

$$\frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2} \left\| R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{1}{2\|B^{-1}\|_{op}} \text{ bzw. } \left\| R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \geq \frac{1}{2\|B^{-1}\|_{op}} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2$$

Da f stetig in 0 existiert dann ein $\delta > 0$ *mit* $U_\delta(0) \subseteq U_1$ *und* $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in U_\varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall x \in U_\delta(0)$*, und dann folgt*

$$(IV) \left\| R \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \frac{1}{2\|B^{-1}\|_{op}} \left\| \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right\|_2 \overset{\triangle-Ungl.}{\leq} \frac{1}{2\|B^{-1}\|_{op}} (\|x\|_2 + \|f(x)\|_2) \; \forall x \in U_\delta$$

Mit (III) folgt dann für alle $x \in U_\delta(0)$*:*

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_2 &= \left\| B^{-1}Ax + B^{-1}R \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right\|_2 \overset{\triangle-Ungl.}{=} \|B^{-1}A\|_{op}\|x\|_2 + \|B^{-1}\|_{op} \left\| R \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &\overset{IV}{\leq} \|B^{-1}A\|_{op}\|x\|_2 + \frac{1}{2}(\|x\|_2 + \|f(x)\|_2) \end{aligned}$$

und dann (nach Substraktion von $\frac{1}{2}\|f(x)\|_2$*):* $\frac{1}{2}\|f(x)\|_2 \leq (\|B^{-1}A\|_{op}\frac{1}{2})\|x\|_2$*. Dann folgt*
$\left\| \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \|x\|_2 + \|f(x)\|_2 \leq (2\|B^{-1}A\|_{op} + 2)\|x\|_2 \; \forall x \in U_\delta(0)$
Setzte also $K = 2\|B^{-1}A\|_{op} + 2$*.* ■

Wir haben mit dem obigen Lemma einen Teil des Satzes über implizite Funktionen gelöst, nämlich: Wenn unter der Voraussetzung des Satzes eine stetige Auflösung $f : U_1 \to U_2$ existiert, so ist diese schon differenzierbar mit Ableitung wie im Satz. Wir müssen also nur noch zeigen, dass eine stetige (und eindeutige) Auflösung existiert!

Das wichtigste Hilfsmittel hierzu ist der Banachsche Fixpunktsatz:

Satz 10.5 (Banachsche Fixpunktsatz) *Sei X ein vollständiger metrischer Raum und sei* $T : X \to X$ *eine Abbildung, so dass ein* $0 \leq q \leq 1$ *existiert mit*

$$d(T_x, T_y) \leq q d(x, y) \; \forall x, y \in X.$$

Dann existiert genau ein $\overline{x} \in X$ *mit* $T(\overline{x}) = \overline{x}$ *(*$\overline{x}$ *heißt dann Fixpunkt von T).*
Ferner gilt: Ist $x_0 \in X$ *beliebiger Startpunkt und ist* $(x_n)_n$ *in X mit* $x_n = T(x_{n-1}) \; \forall n \in \mathbb{N}$*, so gilt* $x_n \to \overline{x}$ *und*

$$\boxed{d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)}$$

<u>Beweis:</u> *Ist $x_0 \in X$ beliebig und $(x_n)_n$ wie im Satz, so gilt zunächst*

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1}) \leq qd(x_n, x_{n-1}) \leq q^n d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \ldots \leq q^n d(x_1, x_0)$$

Ist dann $m \geq n$ beliebig, so gilt

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\overset{\triangle-Ungl.}{\leq} d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots d(x_1, x_0) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} d(k+1, k) \overset{s.o.}{\leq} \sum_{k=n}^{m-1} q^k d(x_1, x_0) \\ &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} q^k \right) d(x_1, x_0) = q^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right) d(x_1, x_0) \\ &\overset{geometr.Reihe}{=} q^n \cdot \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Da $q^n \to 0$ für $n \to \infty$ existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_m, x_n) < \varepsilon \; \forall m, n \geq n$. Damit ist gezeigt, dass $(x_n)_n$ Cauchy-Folge. Sei $\overline{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt auch

$$d(T(\overline{x}), x_n) = d(T(\overline{x}, T(x_{n-1})) \leq qd(\overline{x}, x_{n-1}) \to 0$$

also auch $T(\overline{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$, dh. $\overline{x}$ ist Fixpunkt. Für festes $n \in \mathbb{N}$ folgt dann die Abschätzung

$$d(\overline{x}, x_n) = \lim_{\substack{m\to\infty \\ m \geq n}} d(x_m, x_n) \overset{s.o.}{\leq} \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Sei nun $\overline{y}$ ein weiterer Fixpunkt. Ist $\overline{x} \neq \overline{y}$, so folgt $0 \neq d(\overline{x}, \overline{y}) = d(T(\overline{x}, T(\overline{y})) \leq qd(\overline{x}, \overline{y}) < d(\overline{x}, \overline{y})$. Sie ist ein Widerspruch! ■

<u>Beweis von Satz 10.2:</u> Sei also $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in U$ mit $F\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = c$ und $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ sei invertierbar. Es bleibt zu zeigen: $\exists$ offene Umgebung U_1 von x_0, U_2 von y_0 und eine <u>stetige</u> Funktion $f : U_1 \to U_2$ mit

(I) $U_1 \times U_2 \subseteq U$ und $F\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = c \; \forall x \in U_1$

(II) $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ ist invertierbar für alle $x \in U_1$, und

(III) $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U_1 \times U_2 \Rightarrow y = f(x)$

Durch Übertragung auf $\tilde{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c$ können wir o.B.d.A. $c = 0$ annehmen!

<u>Idee:</u> Wir wandeln die Gleichung $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ in eine Fixpunktgleichung für y um. Sei

dazu $B : \frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
Nach Voraussetzung ist B invertierbar und es gilt

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow B^{-1}F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - B^{-1}F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y$$

Setze also $G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := y - B^{-1}F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Nach Kettenregel ist G stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial G}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E_n B^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nun gelten: $G\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = y_0 - B^{-1}\overbrace{F\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}^{=0} = y_0$ und

$$(*) \qquad \left\|\frac{\partial G}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_{op} \leq 1 \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U_\delta(x_0) \times U_\varepsilon(y_0)$$

$$(**) \quad \left\|B^{-1}F\begin{pmatrix} x \\ y_0 \end{pmatrix}\right\|_2 < \tfrac{1}{4}\varepsilon \qquad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

Setzten wir dann $\overline{Y} := B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_0) \subseteq U_\varepsilon(y_0)$, so ist $\overline{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen (also vollständig bzgl. $\|\cdot\|_2$). Wir definieren nun

$$T_x : \overline{Y} \to \mathbb{R}^m; T_x(y) = G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y - B^{-1}F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dann gelten

a) $T_x(y) \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_0) \subseteq \overline{Y}\ \forall x \in U_\delta(x_0)$, und

b) $\|T_x(y) - T_x(z)\|_2 \leq \frac{1}{2}\|y - z\|_2\ \forall y, z \in \overline{Y}$

Beweis von b): Für alle $y, z \in \overline{Y} = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_0)$ gilt $y + t(z - y) \in \overline{Y} \subseteq U_\varepsilon(x_0)$ (da $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$ konvex).
Nach dem Schrankensatz (Satz 8.7) gilt dann wegen $\left\|\frac{\partial G}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_{op} \leq \frac{1}{2}\ \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U_\delta(x_0) \times U_\varepsilon(x_0)$, dass

$$\|T_x(y) = T_x(z)\|_2 = \left\|G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - G\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}\right\|_2 \leq \max_{t\in[0,1]}\left\|\frac{\partial G}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y + t(z-y) \end{pmatrix}\right\|_{op}\|y-z\|_2 \leq \frac{1}{2}\|y-z\|_2.$$

Beweis von a): Zunächst gilt:

$$\|T_x(y_0) - y_0\|_2 = \left\|y_0 - B^{-1}F\begin{pmatrix} x \\ y_0 \end{pmatrix} - y_0\right\|_2 = \left\|B^{-1}F\begin{pmatrix} x \\ y_0 \end{pmatrix}\right\|_2 \overset{(**)}{\leq} \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ist dann $y \in Y$ beliebig, so folgt

$$\begin{aligned}\|T_x(y_0) - y_0\|_2 &\leq \|T_x(y) - T_x(y_0)\| + \|T_x(y_0) - y_0\|_2 \\ &\overset{b)}{<} \frac{1}{2}\|y - y_0\|_2 + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

also $T_x(y) \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_0) \subseteq \overline{Y}$. Es folgt a)!

Wir können nun den Banachschen Fixpunktsatz auf alle Abbildungen $T_x : \overline{Y} \to \overline{Y}$, $x \in U_\delta(x_0)$ anwenden. Damit folgt: Zu jedem $x \in U_\delta(x_0)$ existiert genau ein $y \in \overline{Y} = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$ mit $T_x(y) = Y$, also $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Nach a) gilt dann $y \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_0)$. Wir definieren daher $f : U_\delta(x_0) \to U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_0)$ durch $f(x) = y \Leftrightarrow F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Fener definieren wir eine Funktionenfolge $(f_k)_k$ mit $f_k : U_\delta(x_0) \to U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_0) \subseteq \overline{Y}$ definiert durch $f_0(x) = y_0\ \forall x \in U_\delta(x_0)$, $f_{k+1}(x) = T_x(f_k(x))\ \forall x \in U_\delta(x_0), k \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten:

(1) $f_k \xrightarrow{glm} f$, denn für alle $x \in U_\delta(x_0)$ folgt aus der Fehlerabschätzung im Banachschen Fixpunktsatz mit $q = \frac{1}{2}$:

$$\|f_k(x) - f(x)\|_2 \leq \frac{q^k}{1-k}\underbrace{\|f_1(x) - f_0(x)\|_2}_{\leq \varepsilon} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \varepsilon,$$

und diese Abschätzung hängt nicht von x ab.

(2) Alle f_k sind stetig. Dies ist klar für $k = 0$ (da f_0 konstant) und der Schritt $k \to k+1$ folgt mit $f_{k+1}(x) = T_x(f_k(x)) = G\begin{pmatrix} x \\ f_k(x) \end{pmatrix}$ – ist Komposition stetiger Abbildungen.

(1) und (2) liefert: f ist stetig! (Blatt 5, Aufgabe 4: Gleichmäßige Limiten stetiger Funktionen sind stetig!).

Setzten wir nun $U_1 = U_\delta(x_0)$, $U_2 = U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_0)$, so erfüllt $f : U_1 \to U_2$ nach Konstruktion die Eigenschaften (I) und (II). Es bleibt zu zeigen, dass $\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ invertierbar für alle $x \in U_1$.

<u>Dazu:</u> Betrachte $d : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$; $d(x) = \det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\right)$. Da $f(x_0) = y_0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ inventierbar ist, gilt $d(x_0) \neq 0$. Da d stetig existiert dann ein $0 < \tilde{\delta} \leq \delta$ mit $d(x) \neq 0$ auf $U_{\tilde{\delta}}(x_0)$.

Ersetzte dann δ durch $\tilde{\delta}$, also $U_1 := U_{\tilde{\delta}}(x_0)$. ■

Bemerkung 10.6 *(1) Der Beweis des Satzes über implizite Funktionen gibt gleichzeitig ein interaktives Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Funktion $f : U_1 \to U_2$ mit $f(x_0) = y_0$, $F\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = c$.*

<u>Dazu:</u> Sei o.B.d.A $c = 0$ (sonst Übergang auf $\tilde{F} = F - c$). Setzte

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y - B^{-1}F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \textit{mit } B = \frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

<u>Dann:</u> Ist $\delta > 0$ klein genug (siehe Bedingungen $(*)$ und $(**)$ im Satz) so definiere Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $f_n : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$, durch

$$\begin{aligned} f_0(x) &= y_0 \qquad \forall x \in U_\delta(x_0) \\ f_{n+1}(x) &= G\begin{pmatrix} x \\ f_n(x) \end{pmatrix} = f_n(x) - B^{-1}F\begin{pmatrix} x \\ f_n(x) \end{pmatrix} \qquad \forall x \in U_\delta(x_0) \end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzung im Satz zeigt, dass für kleine δ die Folge $(f_n)_n$ sehr schnell gleichmäßig gegen f konvergiert.

<u>Beispiel:</u> *<u>Betrachte:</u> $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^3 - y^2$. Dann gilt $F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, also $B^{-1} = -\frac{1}{2}$. Damit erhalten wir mit $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:*

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y + \frac{1}{2}(x^3 - y^2)$$

Wir erhalten damit die folgende Heration:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1,\ f_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x^3 - 1) = \frac{1}{2}(x^3 + 1) \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}(x^3 + 1) + \frac{1}{2}\left(x^3 - \left(\frac{1}{2}(x^3 - 1)\right)^2\right) \\ f_3(x) &= \ldots \end{aligned}$$

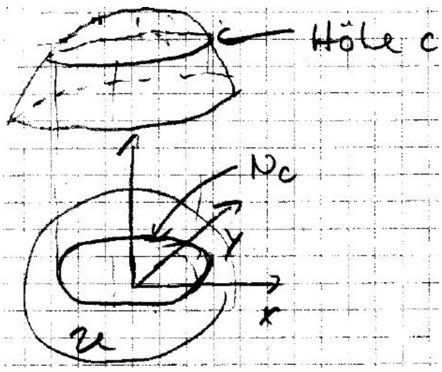
Untersuchung der Bedingung $(*)$ und $(**)$ im Beweis des Satzes zeigt, dass das Verfahren für $x \in U_\delta(1)$ mit $\delta = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 > 0$ „schnell“ gegen die gesuchte Lösung f konvergiert.

(2) <u>Niveaulinien:</u> Sei $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist dann $c \in \mathbb{R}$, so nennt man

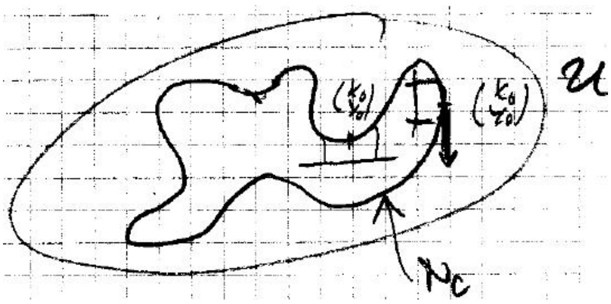
$$N_c := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U \,\middle|\, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \right\}$$

auch die <u>Niveaulinie</u> von F auf die Höhe c. Wenn wir uns den Graphen von F als Berg vorstellen, so ist N_c der auf die $(x, y)-$Ebene projezierte Weg „um / am Berg“ auf Höhe c. Gute Wanderkarten geben z.B. immer die Höhenlinien (etwa 10m-Schritten) an.

<u>Skizze:</u>



Die Höhenlinie selbst ist in der Regel eine Kurve im $\mathbb{R}^2$.



Satz über implizite Funktionen sagt: Ist $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in N_c$ *und* $\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq 0$*, so lässt sich* N_c *in einer Umgebung von* $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *als Graph* $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, $x \in U_\delta(x_0)$ *schreiben.*

<u>Genauer:</u> $\exists \delta, \varepsilon > 0$ *und offene Intervalle* I_1, I_2 *mit* $x_0 \in I_1$, $y_0 \in I_2$ *und*

$$N_c \cap I_1 \times I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \middle| \, x \in I_1 \right\}.$$

Ist $\dfrac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq 0$*, so können wir auch die Rollen von x und y im Satz über implizite Funktionen vertauschen und wir finden Intervalle I_1, I_2 wie oben und eine stetig differenzierbare Funktion $g : I_2 \to I_1$ mit*

$$N_c \cap I_1 \times I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} g(y) \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y \in I_2 \right\}.$$

<u>Allgemein:</u> *Ist* $\nabla F \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \dfrac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right)^t \neq 0$*, so ist auf jeden Fall eine der beiden partiellen Ableitungen $\neq 0$, und wir können* $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$ *zumindest nach einer Variablen auflösen!*

<u>Allgemein:</u> *Ist $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $F(x_0) = c$ und $\nabla F(x_0) \neq 0$, so existiert mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit* $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x_0) \neq 0$. *Ist dann $N_c = \{x \in U \mid F(x) = c\}$, so können wir die j-te Komponente von N_c in einer Umgebung von x_0 als Funktion der anderen Komponenten darstellen.*

Dazu vertausche j-te und n-te Variable und erhalte o.B.d.A $\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$. *Dann schreibe* $x_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *mit* $z_0 = \left(x_{0_1}, \ldots, x_{0_{n-1}}\right)^t \in \mathbb{R}^{-1}$, $y_0 = x_{0_n}$. *Satz über implizite Funktionen liefert Umgebung* U_1 *von* z_0, I_2 *von* y_0 *und* $f : U_1 \to U_2$ *mit*

$$U_1 \times U_2 \cap N_c = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ f(z) \end{pmatrix} \middle| z \in U_1 \right\}$$

schließlich vertausche wieder die n-te mit der j-ten Variablen!

(3) *Noch allgemeiner: Sei* $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *mit* $n > m$. *Sei* $x_0 \in U$ *mit* $F(x_0) = c$ *und sei* $rang(DF(x_0)) = m$.
Dies ist genau dann der Fall, wenn die Jacobi-Matrix $DF(x_0)$ *in linear unabhängige Spalten* $\left(\frac{\partial F}{\partial x_{j_1}}(x_0), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_{j_m}}(x_0)\right)$ *besitzt.*
Durch Vertauschen der Variablen können wir diese Spalten „nach hinten schieben“. Wir erhalten dann die Form

$$F : U \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \text{ mit } k = n - m > 0.$$

und $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} z_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *invertierbar, dh. der Satz über implizite Funktionen ist anwandbar.*

Beispiel 10.7 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - 1$, $c = 0$. *Dann gilt* $\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$. *Betrachte* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Dann* $\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, *aber die anderen Ableitungen im Punkt* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *verschwinden.*

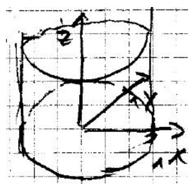
Damit: $\exists$ *Umgebung* U *von* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *und* I *von 1 in* $\mathbb{R}$ *und eine Funktion* $g : U \to I$ *mit*

$$N_0 \cap (I \times U) = \left\{ \begin{pmatrix} g\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U_1 \right\}.$$

Im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *ist* $\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ *und* $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ *verschwinden. Hier können wir also die y-Komponente von* N_0 *in einer Umgebung von* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *als Funktion von* $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ *schreiben,* *etwa*

$$N_0 \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in U, y \in I \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ g\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in U \right\}$$

mit $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ und $g : U \to I$ geeignet.
Skizze:



$N_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$ *ist Zylinderwand!*

Wir kommen nun zu einer wichtigen Anwendung des Satzes über implizite Funktionen zur Existenz von „lokalen“ Umkehrfunktionen. Dazu benötigen wir

Definition 10.8 *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to V$ bijektiv und differenzierbar, so dass auch $f^{-1} : V \to U$ differenzierbar ist. Dann heißt f Diffeomorphismus. Sind f und f^{-1} sogar stetig differenzierbar, so heißt f C^1-Diffeomorphismus (C^k-Diffeomorphismus, falls f und f^{-1} k-mal stetig differenzierbar).*

10.9 (Wichtige Beobachtung) *Ist $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus, so ist $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in U$ und es gilt*

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1} \qquad \forall x \in U.$$

bzw.

$$Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1} \qquad \forall y \in V, \qquad (x = f^{-1}(y))$$

(dis entspricht der Formel $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ in einer Variablen!).

Beweis: *Betrachte $f^{-1} \circ f : U \to U$. Da $f^{-1} \circ f(x) = x$ gilt*

$$E_n = D(f^{-1} \circ f)(x) \overset{Kettenregel}{=} Df^{-1}(f(x)) \cdot Df(x)$$

Es folgt $Df^{-1}(f(y)) = (Df(x))^{-1}$ ∎

Satz 10.10 (über lokale Umkehrfunktionen) *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist dann $x_0 \in U$ mit $Df(x_0)$ invertierbar, so existieren offene Umgebungen $U_1 \subseteq U$, $V_1 = f(U_1)$ und $f = U_1 \to V_1$ ist ein C^1-Diffeomorphismus.*

Beweis: *Beachte $F : R^n \times U \to \mathbb{R}^n$; $F\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = f(x) - y$. Dann ist F stetig differenzierbar* *mit* $\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = Df(x)$*. Sei* $y_0 = f(x_0)$*. nach Voraussetzung gilt* $F\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = 0$ *und* $Df(x)$ *ist invertierbar. Satz über implizite Funktionen liefert:* $\exists$ *offene Umgebungen* $\tilde{U_1}$ *von* x_0*,* V_1 *von* y_0 *und eine stetig differenzierbare Funktion* $g : V_1 \to \tilde{U_1}$ *mit*

$$\left\{ \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in V_1 \times \tilde{U_1} \middle| f(x) = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ g(y) \end{pmatrix} \middle| y \in V_1 \right\}.$$

Damit folgt insbesondere $f(g(y)) = y \ \forall y \in V_1$*. Setzte nun* $U_1 := f^{-1}(V_1) \cap \tilde{U_1}$*. Da f stetig, sind* $f^{-1}(V_1)$ *und dann auch* U_1 *stetig. Da* $f(g(y)) = y$ *für alle* $y \in V_1$ *gilt* $g(V_1) \subseteq U_1$ *und für* $x \in U_1$ *gilt*

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ x \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_1 \times \tilde{U_1} \middle| f(x) = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ g(y) \end{pmatrix} \middle| y \in V_1 \right\}$$

also folgt $x = g(f(x))$ *für alle* $x \in U_1$*.*
Damit ist aber $g : V_1 \to U_1$ *Umkehrfunktion für* $f : U_1 \to V_1$*. Da g stetig differenzierbar, folgt die Behauptung.* ■

Folgerung 10.11 *Seien* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $f : U \to V$ *stetig differenzierbar und bijektiv. Dann sind äquivalent:*

(1) f ist C^1-*Diffeomorphismus.*

(2) Df(x) ist invertierbar für alle $x \in U$*.*

<u>Beweis:</u> $(1) \Rightarrow (2)$ *ist 10.9*
$(2) \Rightarrow (1)$*: Da f bijektiv existiert eine Umkehrfunktion* $f^{-1} : V \to U$*. Sei nun* $x_0 \in U$ *beliebig. Nach 10.10 existiert lokal stetig differenzierbare Umkehrfunktion* $g : V_1 \to U_1$ *für* $f : U_1 \to V_1$ *mit* $U_1 \subseteq U$*,* $V_1 \subseteq V$ *Umgebung von* x_0*, bzw.* $f(x_0)$*. Dann gilt aber* $g(y) = g(f(f^{-1}(y))) = f^{-1}(y) \ \forall y \in V_1$*, also* $g = f^{-1}|_{V_1}$*. Damit ist* f^{-1} *stetig differenzierbar in* $y_0 = f(x_0) \in V$*. Da* x_0 *beliebig gewählt ist* f^{-1} *überall stetig differenzierbar.* ■

Satz 10.12 (über offene Abbildungen) *Seien* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbar mit* $Df(x)$ *invertierbar für alle* $x \in U$*. Dann ist* $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen. Insbesondere folgt: Ist* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *injektiv, so ist* $f : U \to V$ *ein* C^1-*Diffeomorphismus.*

<u>Beweis:</u> *Sei* $y_0 \in V$ *beliebig.* <u>*Zeige:*</u> $\exists \varepsilon > 0$ *mit* $U_\varepsilon(y_0) \subseteq V$*. Dazu wähle* $x_0 \in U$ *mit* $f(x_0) = y_0$*. Nach Voraussetzung ist* $Df(x_0)$ *invertierbar. Nach 10.10 existiert daher offene Umgebungen* U_1*,* V_1 *von* x_0 *bzw.* $y_0 = f(x_0)$ *mit* $U_1 \subseteq U$ *und* $f : U_1 \to V_1$ *ist* C^1-*Diffeomorphis, also insbesondere bijektiv.*
Es folgt: $V_1 = f(U_1) \subseteq f(U) = V$*. Da* V_1 *offen, existiert* $\varepsilon > 0$ *mit* $U_\varepsilon(y_0) \subseteq V_1 \subseteq V$*.*
Damit ist V offen. Ist f injektiv, so ist dann $f : U \to V$ *bijektiv und f ist* C^1-*Diffeomorphismus nach 10.11.* ■

Beispiel 10.13 (Polarkoordinaten) *Sei* $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *gegeben durch*

$$f \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Dann ist f *stetig differenzierbar mit* $Df \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ *und es gilt*

$$\det \left(Df \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \right) = r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r > 0$$

Es folgt $Df \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$ *ist invertierbar für alle* $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$ *und damit ist* f *überall lokal umkehrbar.*
Setzte nun $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$, $V = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \geq 0 \right\}$ *so ist*

$$f : U \to V \text{ bijektiv}$$

also nach 10.11 C^1-*Diffeomorphismus*
Für die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ *gilt dann nach 10.9*

$$Df^{-1}\left(f \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \right) = \left(Df \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -\frac{1}{r}\sin(\varphi) & \frac{1}{r}\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$, *so gilt* $f = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ *und* $\frac{x}{r} = \cos(\varphi)$, $\frac{y}{r} = \sin(\varphi)$. *Damit folgt dann*

$$Df^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$